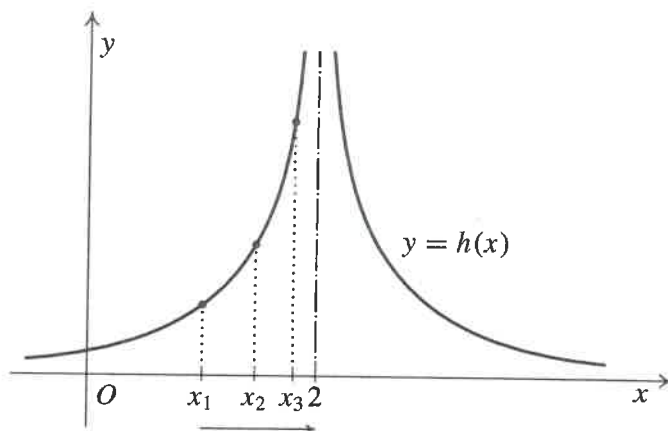


# XV. DIFERENCIÁLNÍ POČET

## §1. Definice limity

### 6.1 Definice limity

151



Obr. 6.3

### A) Vlastní limita ve vlastním bodě

Na obr. 6.1 jsme si ukázali příklad funkce  $f$ , která má tu vlastnost, že když se  $x$  přibližuje k číslu 2, hodnoty  $f(x)$  se přibližují k číslu 3. Tato situace je popsána v následující definici a podrobněji znázorněna na obr. 6.4.

**Definice 6.1.** Řekneme, že funkce  $f$  má v bodě  $x_0 \in \mathbb{R}$  limitu  $A \in \mathbb{R}$ , jestliže ke každému  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$  existuje  $\delta \in \mathbb{R}^+$  takové, že pro všechna  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ,  $x \neq x_0$ , platí  $f(x) \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ . Píšeme:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A.$$

Symbolicky zapsáno:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow$$

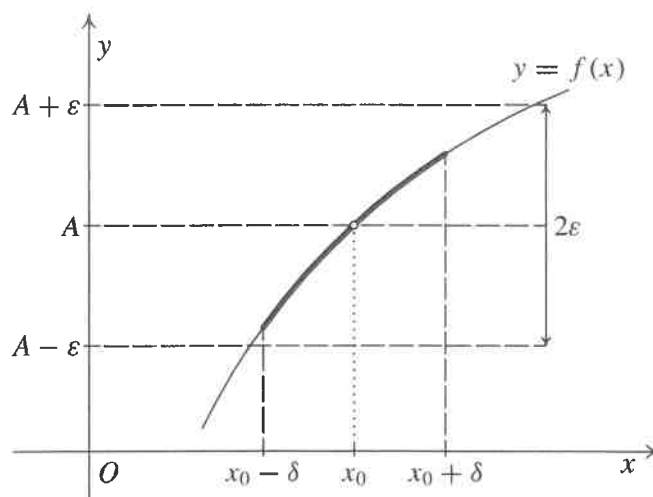
$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}: f(x) \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)).$$

Objasněme si smysl předchozí definice: Zvolíme libovolný (libovolně úzký) pás o šířce  $2\varepsilon$  kolem přímky  $y = A$ . K němu musíme umět najít interval  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  o šířce  $2\delta$  kolem bodu  $x_0$  tak, aby graf funkce  $f$  na množině  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$  ležel celý ve zvoleném pásu. Zřejmě číslo  $\delta > 0$  zvolené v obr. 6.4 bychom mohli ještě poněkud zvětšit.

**Poznámka 6.2.** Písmena  $\varepsilon$  a  $\delta$  jsou použita z tradičních historických důvodů.

### B) Nevlastní limita ve vlastním bodě

Na obr. 6.3 jsme si ukázali příklad funkce  $h$ , která má tu vlastnost, že když se  $x$  přibližuje k číslu 2, hodnoty  $h(x)$  se neomezeně zvětšují. Přesně je tato vlastnost popsána v následující definici a znázorněna na obr. 6.5 a).



Obr. 6.4

**Definice 6.3.** Řekneme, že funkce  $f$  má v bodě  $x_0 \in \mathbb{R}$  limitu  $+\infty$ , jestliže ke každému číslu  $M \in \mathbb{R}$  existuje  $\delta \in \mathbb{R}^+$  takové, že pro všechna  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ,  $x \neq x_0$ , platí  $f(x) > M$ . Píšeme:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty.$$

Symbolicky zapsáno:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$$

$$(\forall M \in \mathbb{R} \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} : f(x) > M).$$

Tedy ke každému reálnému číslu  $M$  musíme umět najít interval  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  tak, aby graf funkce  $f$  na množině  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$  ležel celý nad přímkou  $y = M$ , tj. nad rovnoběžkou s osou  $x$  ve výšce  $M$ .

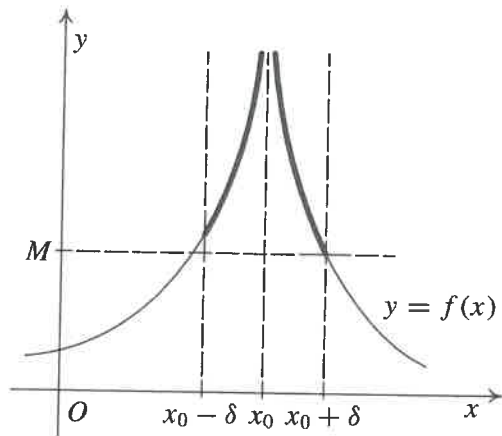
Obdobně definujeme  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ . (Pouze nerovnost  $f(x) > M$  změňme na  $f(x) < M$ ) — viz obr. 6.5 b).

### c) Vlastní limita v nevlastním bodě

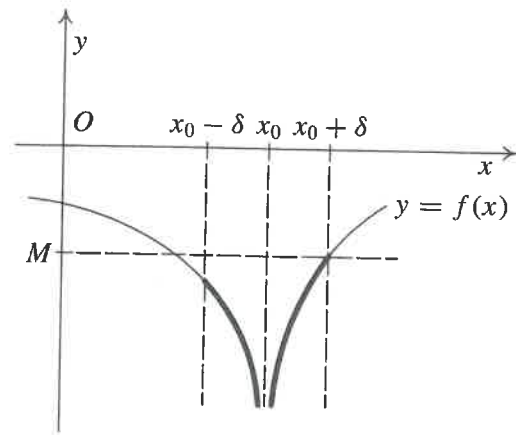
Zabývejme se nyní případem, kdy se  $x$  blíží k  $+\infty$  nebo  $-\infty$  (vzdaluje se neomezeně vpravo nebo vlevo) a hodnoty  $f(x)$  se blíží ke konečnému číslu. Situace je znázorněna na obr. 6.5 c) a 6.5 d).

**Definice 6.4.** Řekneme, že funkce  $f$  má v  $+\infty$  (nebo podrobněji pro  $x$  jdoucí do  $+\infty$ ) limitu  $A \in \mathbb{R}$ , jestliže ke každému číslu  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$  existuje číslo  $K \in \mathbb{R}$  takové, že pro všechna reálná čísla  $x > K$  platí  $f(x) \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ . Píšeme:

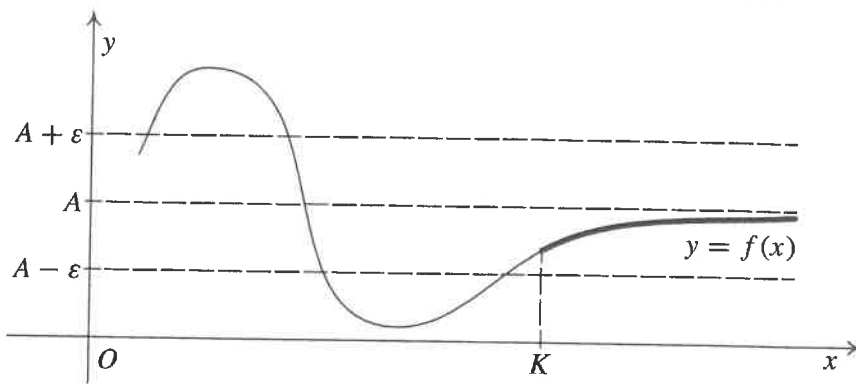
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A.$$



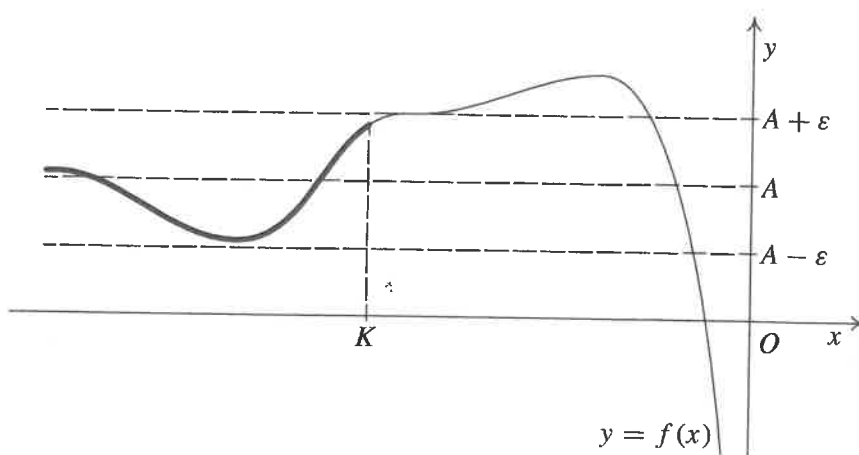
a)



b)



c)



d)

Obr. 6.5

Symbolicky zapsáno:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \Leftrightarrow (\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists K \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R}, x > K : f(x) \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)).$$

To znamená, že lze najít hodnotu  $K$  takovou, aby pro každé  $x > K$  ležel graf funkce  $f$  uvnitř pásu o šířce  $2\varepsilon$ , který je sestrojen kolem přímky  $y = A$  (číslo  $K$  by bylo možné v obrázku 6.5 c) zvolit poněkud menší).

Obdobně definujeme  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$  (pouze nerovnost  $x > K$  se v předchozí definici změní na  $x < K$ ) — viz obr. 6.5 d).

### D) Nevlastní limita v nevlastním bodě

Nakonec si všimneme případu, kdy se  $x$  blíží k  $+\infty$  nebo  $-\infty$  (vzdaluje se neomezeně vpravo nebo vlevo) a hodnoty  $f(x)$  se neomezeně zvětšují popř. zmenšují (limita je  $\pm\infty$ ). Uvedeme přesnou definici pouze jedné varianty (ostatní dostaneme jednoduchými obměnami) a situaci budeme ilustrovat obrázky.

**Definice 6.5.** Řekneme, že funkce  $f$  má v  $+\infty$  (nebo podrobněji pro  $x$  jdoucí do  $+\infty$ ) limitu  $+\infty$ , jestliže ke každému číslu  $M \in \mathbb{R}$  existuje číslo  $K \in \mathbb{R}$  takové, že pro všechna reálná  $x > K$  platí  $f(x) > M$ . Píšeme:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Symbolicky zapsáno:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow (\forall M \in \mathbb{R} \exists K \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R}, x > K : f(x) > M).$$

Situaci popsanou v definici ilustruje obr. 6.6 a). Obrázky 6.6 b) až 6.6 d) ilustrují zbývající možnosti (v definici se změní nerovnost  $x > K$  na  $x < K$  nebo  $f(x) > M$  na  $f(x) < M$ ).

Obdobně definujeme  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

### E) Souhrnná definice limity

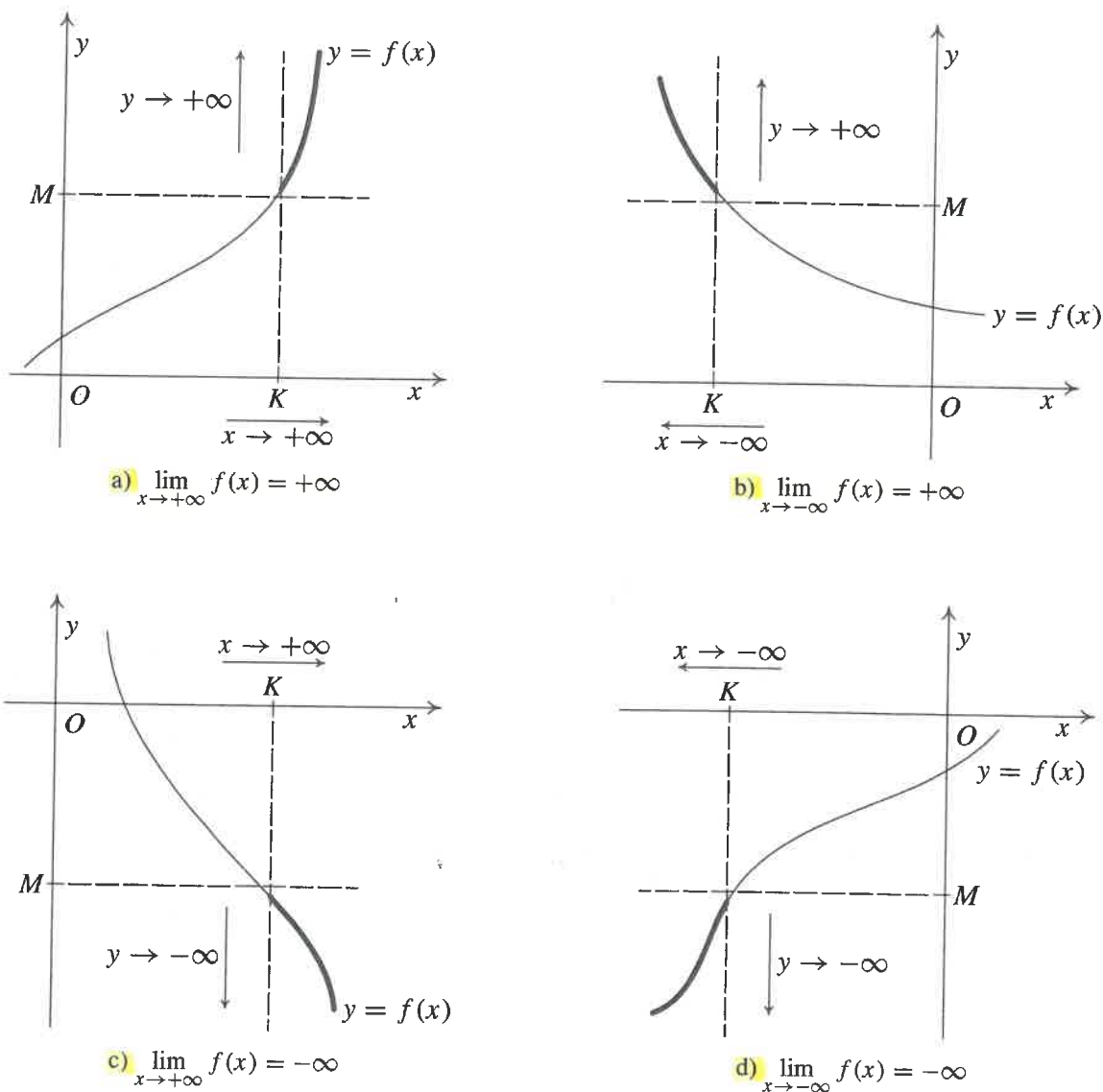
V předchozích odstavcích jsme si popsali všechny možnosti, které v případě existence limity mohou nastat. Mluvili jsme o následujících případech ( $x_0, A \in \mathbb{R}$ ):

|                                 |                                      |
|---------------------------------|--------------------------------------|
| vlastní limita ve vlastním bodě | $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A,$ |
|---------------------------------|--------------------------------------|

|                                   |                                              |
|-----------------------------------|----------------------------------------------|
| nevlastní limita ve vlastním bodě | $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty,$ |
|-----------------------------------|----------------------------------------------|

|                                  |                                            |
|----------------------------------|--------------------------------------------|
| vlastní limita v nevlastním bodě | $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = A,$ |
|----------------------------------|--------------------------------------------|

|                                    |                                                    |
|------------------------------------|----------------------------------------------------|
| nevlastní limita v nevlastním bodě | $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty.$ |
|------------------------------------|----------------------------------------------------|



Obr. 6.6

O *limitě ve vlastním bodě* mluvíme tehdy, když se  $x$  se přibližuje ke konečnému číslu, a o *limitě v nevlastním bodě*, když se  $x$  blíží k  $+\infty$  nebo k  $-\infty$ . Obdobně mluvíme o *vlastní limitě*, pokud je limita rovna konečnému číslu, a o *nevlastní limitě*, pokud je limita rovna  $+\infty$  nebo  $-\infty$ .

Pokusme se nyní vyslovit definici limity, v níž budou zahrnuty všechny uvedené varianty. Abychom mohli danou situaci popsat, budeme potřebovat pojem okolí bodu. Obecně nás budou zajímat jednak případy, kdy se přibližujeme k nějakému vlastnímu bodu  $x_0 \in \mathbb{R}$ , ale také případy, kdy se budeme přibližovat k nevlastním bodům  $\pm\infty$ . Zavedme proto pojem okolí bodu pro vlastní i nevlastní body.

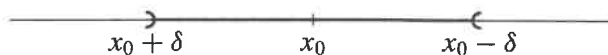
**Definice 6.6.**

- i) **Okolím** bodu  $x_0 \in \mathbb{R}$  (podrobněji  $\delta$ -okolím bodu  $x_0$ ) rozumíme otevřený interval  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ , kde  $\delta$  je kladné reálné číslo. Značíme je  $\mathcal{O}(x_0)$ .
- ii) **Okolím** bodu  $+\infty$  rozumíme každý interval  $(k, +\infty)$ , kde  $k \in \mathbb{R}$ . Značíme je  $\mathcal{O}(+\infty)$ .
- iii) **Okolím** bodu  $-\infty$  rozumíme každý interval  $(-\infty, k)$ , kde  $k \in \mathbb{R}$ . Značíme je  $\mathcal{O}(-\infty)$ .
- iv) **Prstencovým okolím** bodu  $x_0 \in \mathbb{R}^*$  rozumíme množinu  $\mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ . Značíme je  $\mathcal{P}(x_0)$ .

$\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  – reálná množina reálných čísel

**Poznámka 6.7.**

- Pokud je pro nás důležitá konkrétní velikost okolí bodu  $x_0 \in \mathbb{R}$ , píšeme místo  $\mathcal{O}(x_0)$  podrobněji  $\mathcal{O}_\delta(x_0)$ . Obdobně pro prstencové okolí.
- Je-li  $x_0 \in \mathbb{R}$ , pak  $x \in \mathcal{O}_\delta(x_0)$  (tj.  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ , tj.  $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ ), právě když  $|x - x_0| < \delta$ .
- Je-li  $x_0 \in \mathbb{R}$ , pak  $x \in \mathcal{P}_\delta(x_0)$  (tj.  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$ , tj. když platí  $x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ ), právě když  $0 < |x - x_0| < \delta$ .
- Je-li  $x_0 \in \mathbb{R}$ , pak délka intervalu  $\mathcal{O}_\delta(x_0)$  je  $2\delta$ .



Obr. 6.7

- Platí  $\mathcal{O}(+\infty) = \mathcal{P}(+\infty)$  a  $\mathcal{O}(-\infty) = \mathcal{P}(-\infty)$ .

Nyní uveďme souhrnnou definici limity.

**Definice 6.8.** Řekneme, že funkce  $f$  má v bodě  $x_0 \in \mathbb{R}^*$  limitu  $A \in \mathbb{R}^*$ , jestliže ke každému okolí  $\mathcal{O}(A)$  bodu  $A$  existuje prstencové okolí  $\mathcal{P}(x_0)$  bodu  $x_0$  takové, že pro všechna  $x \in \mathcal{P}(x_0)$  platí  $f(x) \in \mathcal{O}(A)$ . Píšeme:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A.$$

Symbolicky zapsáno:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow (\forall \mathcal{O}(A) \exists \mathcal{P}(x_0) \forall x \in \mathcal{P}(x_0) : f(x) \in \mathcal{O}(A)).$$

**Poznámka 6.9.**

- Existuje-li limita  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ , znamená to, že existuje prstencové okolí  $\mathcal{P}(x_0)$  bodu  $x_0$ , ve kterém je funkce  $f$  definována.

2. Limita nám nic neříká o tom, jak se funkce chová přímo v bodě  $x_0$ . Tedy z existence limity nepoznáme, zda je funkce v bodě  $x_0$  definována, či nikoliv. Jinými slovy, limita funkce  $f$  v bodě  $x_0$  nezávisí na funkční hodnotě v bodě  $x_0$ .

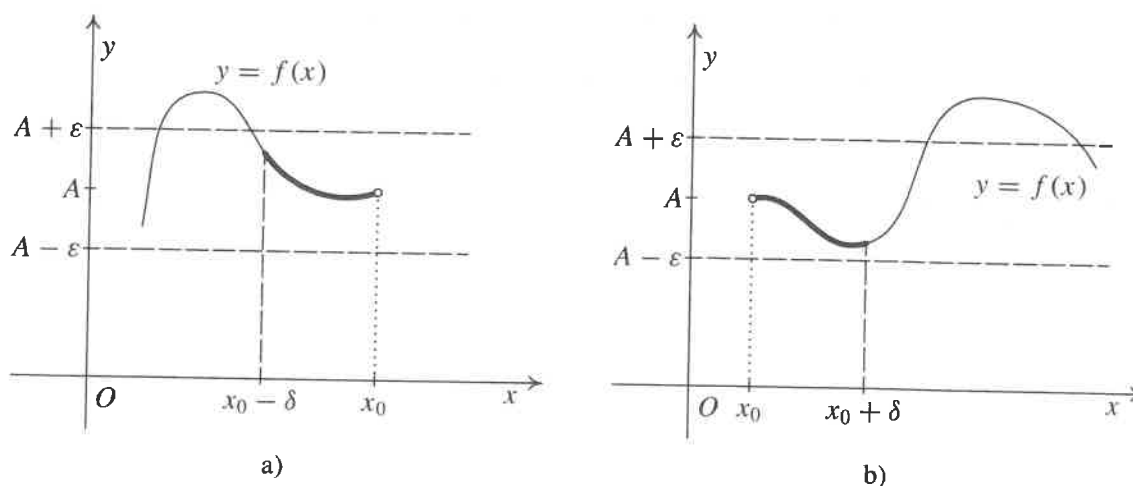
### F) Jednostranné limity

Jestliže v definici limity funkce  $f$  ve vlastním bodě  $x_0 \in \mathbb{R}$  vezmeme v úvahu jen body ležící vlevo od  $x_0$ , tj.  $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ , dostaneme *limitu zleva* (obr. 6.8 a)):

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A.$$

Podobně když vezmeme v úvahu jen body ležící vpravo od  $x_0 \in \mathbb{R}$ , tj.  $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ , dostaneme *limitu zprava* (obr. 6.8 b)):

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A.$$



Obr. 6.8

Těmto limitám říkáme *jednostranné limity*. Dříve než uvedeme jejich přesnou definici, je třeba zavést levé a pravé prstencové okolí bodu  $x_0$ :

#### Definice 6.10.

- i) *Levým prstencovým okolím* bodu  $x_0 \in \mathbb{R}$  rozumíme interval  $(x_0 - \delta, x_0)$ , kde  $\delta$  je kladné reálné číslo. Značíme je  $\mathcal{P}^-(x_0)$ .
- ii) *Pravým prstencovým okolím* bodu  $x_0 \in \mathbb{R}$  rozumíme interval  $(x_0, x_0 + \delta)$ , kde  $\delta$  je kladné reálné číslo. Značíme je  $\mathcal{P}^+(x_0)$ .

**Definice 6.11.**

- i) Řekneme, že *funkce  $f$  má v bodě  $x_0 \in \mathbb{R}$  limitu zleva* rovnou  $A \in \mathbb{R}^*$ , jestliže ke každému okolí  $\mathcal{O}(A)$  bodu  $A$  existuje levé prstencové okolí  $\mathcal{P}^-(x_0)$  bodu  $x_0$  takové, že pro všechna  $x \in \mathcal{P}^-(x_0)$  platí  $f(x) \in \mathcal{O}(A)$ . Píšeme:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A.$$

- ii) Řekneme, že *funkce  $f$  má v bodě  $x_0 \in \mathbb{R}$  limitu zprava* rovnou  $A \in \mathbb{R}^*$ , jestliže ke každému okolí  $\mathcal{O}(A)$  bodu  $A$  existuje pravé prstencové okolí  $\mathcal{P}^+(x_0)$  bodu  $x_0$  takové, že pro všechna  $x \in \mathcal{P}^+(x_0)$  platí  $f(x) \in \mathcal{O}(A)$ . Píšeme:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A.$$

**Poznámka 6.12.** Je-li  $x_0 \in \mathbb{R}$ , pak lze mluvit jednak o limitě zprava, kdy vyšetřujeme všechna  $x \in \mathcal{P}^+(x_0)$ , jednak o limitě zleva, kdy vyšetřujeme všechna  $x \in \mathcal{P}^-(x_0)$ , a konečně o limitě, kdy vyšetřujeme všechna  $x \in \mathcal{P}(x_0)$ .

Je-li  $x_0 = +\infty$ , pak mluvíme pouze o limitě, neboť  $\mathcal{P}(+\infty) = (k, +\infty)$ ,  $k \in \mathbb{R}$ . To znamená, že okolí bodu  $+\infty$  je vlastně „levé prstencové okolí“ bodu  $+\infty$  a jiné ani nelze uvažovat. Analogicky pro bod  $x_0 = -\infty$ .

§2.

**6.2 Vlastnosti limit**

Nyní si uvedeme ve větách několik základních vlastností limit.

1.1.

**Věta 6.13.** *Nechť  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $A \in \mathbb{R}^*$ . Limita v bodě  $x_0$  existuje právě tehdy, když v tomto bodě existují obě jednostranné limity a jsou stejné. Zapsáno symbolicky:*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \left( \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A \right).$$

Tvrzení věty používáme k výpočtu limity funkce v bodě  $x_0$ , která je dána různými předpisy pro  $x > x_0$  a  $x < x_0$ . Dále ji využíváme k důkazu faktu, že limita dané funkce v bodě  $x_0$  neexistuje. Jestliže totiž některá z jednostranných limit neexistuje, nebo obě existují, ale jsou navzájem různé, pak limita neexistuje. Např. na obr. 6.9 je načrtnut graf funkce  $g$ , pro kterou platí

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 1, \quad \text{a tedy } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) \text{ neexistuje.}$$

1.1.

**Věta 6.14.** *Funkce  $f$  má v bodě  $x_0 \in \mathbb{R}^*$  nejvýše jednu limitu.*

**Věta 6.16.** *Nechť  $x_0 \in \mathbb{R}^*$ ,  $A \in \mathbb{R}^*$  a funkce  $f$  je definována na nějakém prstencovém okolí  $\mathcal{P}(x_0)$  bodu  $x_0$ . Pak  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , právě když pro každou posloupnost  $(x_n)$  takovou, že pro každé  $n \in \mathbb{N}$  je  $x_n \in \mathcal{P}(x_0)$ , platí*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A.$$

Kdybychom dokazovali všechny věty o limitách, pak by nám Heineho definice limity umožnila jednoduše tyto věty dokázat na základě dříve uvedených vět o limitách posloupností.

Nyní si uvedeme větu důležitou pro konkrétní počítání limit funkcí. Pomocí této věty budeme schopni ze znalosti limit dvou funkcí  $f$  a  $g$  určit limitu jejich součtu, rozdílu, součinu a podílu.

**Věta 6.17.** *Nechť  $x_0 \in \mathbb{R}^*$  a nechť existují  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  a  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ . Pak platí:*

- 1)  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x),$
- 2)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x),$
- 3)  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)},$
- 4)  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)|,$

*jsou-li definovány pravé strany výše uvedených rovností.*

Věta říká, že limita součtu (rozdílu, součinu, podílu) je rovna součtu (rozdílu, součinu, podílu) limit, pokud mají výrazy na pravých stranách rovností smysl. Předpoklad smysluplnosti výrazů na pravých stranách rovností je velmi důležitý především pro počítání s nevlastními limitami. Je třeba znát, které operace s  $\pm\infty$  jsou definovány a které nikoliv. Podrobněji se k tomu vrátíme v oddíle věnovanému výpočtu limit.

Abychom mohli předchozí větu využít k výpočtu limit, musíme znát limity jednotlivých funkcí. V následujícím oddílu (o spojitosti) si ukážeme, jak lze v některých případech určit limity elementárních funkcí.

§ 3.

### 6.3 Spojitost

Pomocí limity funkce v bodě budeme definovat spojitost funkce v bodě.

**Definice 6.18.** Řekneme, že funkce  $f$  je *spojitá v bodě*  $x_0 \in \mathbb{R}$ , jestliže platí

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

**Poznámka 6.19.**

1. Je-li  $f$  spojitá v bodě  $x_0$ , pak
  - a) existuje vlastní (konečná) limita funkce  $f$  v bodě  $x_0$ ,
  - b) funkce  $f$  je definovaná v bodě  $x_0$ , tj. existuje  $f(x_0)$ ,
  - c) tato dvě čísla jsou si rovna.
2. Platí-li rovnost uvedená v definici jen pro některou jednostrannou limitu, mluvíme o *spojitosti zprava*, resp. o *spojitosti zleva* v bodě  $x_0$ .
3. Volně řečeno, spojitost v bodě  $x_0$  znamená, že  $f(x_0)$  je právě to číslo, k němuž se hodnoty funkce na okolí bodu  $x_0$  přibližují.

Z věty 6.17 dostáváme, že součet, rozdíl, součin a podíl (pokud je definován) funkcí spojitých v bodě jsou funkce spojitě v témže bodě.

**Věta 6.20.** *Nechť funkce  $f$  a  $g$  jsou spojitě v bodě  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Pak i funkce  $f \pm g$  a  $f \cdot g$  jsou spojitě v bodě  $x_0$ . Je-li navíc  $g(x_0) \neq 0$ , je i funkce  $\frac{f}{g}$  spojitá v bodě  $x_0$ .*

Dále lze ukázat, že složením spojitých funkcí vznikne opět spojitá funkce.

**Věta 6.21.** *Nechť funkce  $f$  je spojitá v bodě  $x_0 \in \mathbb{R}$  a nechť funkce  $g$  je spojitá v bodě  $f(x_0)$ . Pak funkce  $g \circ f$  je spojitá v bodě  $x_0$ .*

Víme-li, že je funkce  $f$  spojitá v bodě  $x_0$ , pak se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  počítá velice snadno, neboť je to vlastně přímo funkční hodnota  $f(x_0)$ . Proto je důležité znát co nejvíce příkladů spojitých funkcí. Lze dokázat následující tvrzení.

**Věta 6.22.** *Nechť  $f$  je základní elementární funkce a nechť  $x_0$  je vnitřním bodem definičního oboru  $D(f)$ . Pak funkce  $f$  je spojitá v bodě  $x_0$ .*

Poznamenejme, že bod  $x_0$  je vnitřním bodem  $D(f)$  právě tehdy, když existuje okolí  $\mathcal{O}(x_0)$  bodu  $x_0$  takové, že platí:  $\mathcal{O}(x_0) \subset D(f)$ .

Dále připomeňme, že základními elementárními funkcemi nazýváme funkce exponenciální a logaritmické, mocninné, goniometrické a cyklometrické, hyperbolické a hyperbolometrické.

Z vět 6.20, 6.21 a 6.22 okamžitě plyne, že všechny elementární funkce (funkce, které lze vytvořit ze základních elementárních funkcí pomocí konečného počtu operací sčítání, odčítání, násobení, dělení a skládání funkcí) jsou spojitě ve všech vnitřních bodech definičního oboru (v krajních bodech jde o jednostrannou spojitost).

**Poznámka 6.23.** Nechť  $x_0 \in \mathbb{R}$  a nechť je funkce  $f$  definována v nějakém prstencovém okolí  $\mathcal{P}(x_0)$  bodu  $x_0$ . Pak z hlediska spojitosti funkce v bodě mohou nastat následující případy.

1. Funkce  $f$  je v bodě  $x_0$  spojitá. To znamená, že limita existuje ( $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ ), funkce je v bodě  $x_0$  definována ( $f(x_0) = A$ ) a platí  $L = A$ .

*Řešení.*

- a) Jedná se o elementární funkci, přičemž  $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1, 2\}$ . Funkce je spojitá ve všech bodech  $x \in D(f)$ , neboť každý bod  $x \in D(f)$  je vnitřním bodem  $D(f)$ . Tedy funkce  $f$  není spojitá v bodech  $x_1 = -2$ ,  $x_2 = 1$ ,  $x_3 = 2$ , v nichž není definována.
- b) Funkce signum (viz str. 41) není spojitá v bodě  $x_0 = 0$ . Obě jednostranné limity existují, ale jsou navzájem různé:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1.$$

Jedná se o nespojitost prvního druhu.

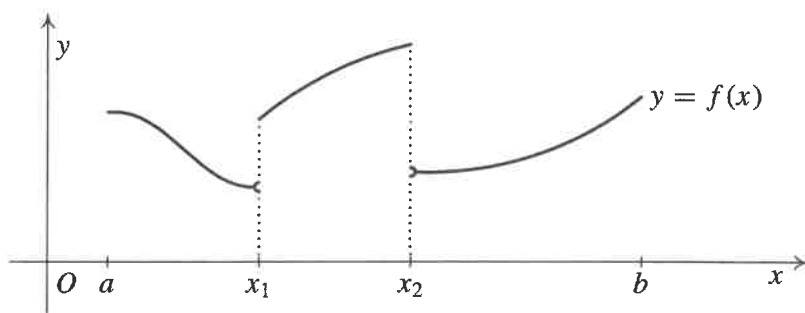
- c) Dirichletova funkce (viz str. 42) není spojitá v žádném bodě  $x_0 \in \mathbb{R}$ . V žádném bodě neexistuje ani jedna jednostranná limita. Jedná se o nespojitost druhého druhu. ▲

V definici 6.18 jsme zavedli pojem spojitosti funkce v bodě. Na základě této lokální vlastnosti nyní definujeme globální vlastnost — spojitost na intervalu.

**Definice 6.25.** Řekneme, že funkce  $f$  je *spojitá na intervalu*  $J \subset \mathbb{R}$ , platí-li

- i)  $f$  je spojitá v každém vnitřním bodě intervalu  $J$ ,
- ii) patří-li počáteční (resp. koncový) bod intervalu  $J$  k tomuto intervalu, je v něm funkce  $f$  spojitá zprava (resp. zleva).

**Poznámka 6.26.** Funkce definovaná na intervalu  $\langle a, b \rangle$  se nazývá *po částech spojitá*, je-li na  $\langle a, b \rangle$  spojitá nejvýše s výjimkou konečného počtu bodů nespojitosti prvního druhu — viz obr. 6.11. Tyto funkce mají značný praktický význam v některých důležitých partiích matematiky používaných v aplikacích, jako jsou např. Fourierovy<sup>1</sup> řady nebo Laplaceova<sup>2</sup> transformace.



Obr. 6.11

<sup>1</sup> **Jean-Baptiste Joseph Fourier** (1768–1830) (čti furje) — významný francouzský matematik, jeden ze zakladatelů matematické fyziky.

<sup>2</sup> **Pierre Simon Laplace** (1749–1827) (čti laplas) — významný francouzský matematik, fyzik a astronom. Zabýval se parciálními diferenciálními rovnicemi a teorií pravděpodobnosti.

54.

## 6.4 Limity základních elementárních funkcí

V této kapitole si ukážeme, jak počítat limity základních elementárních funkcí v bodě  $x_0$ . Připomeňme, že mezi základní elementární funkce patří funkce exponenciální, logaritmické, mocninné, goniometrické, cyklometrické, hyperbolické a hyperbolometrické. Budeme přitom rozlišovat dva případy — limity funkcí spojitých v bodě  $x_0$  a limity funkcí, které v bodě  $x_0$  nejsou spojité.

### A) Limity funkcí spojitých v bodě

V předchozí části o spojitosti jsme si řekli, že pokud víme, že je funkce  $f$  spojitá v bodě  $x_0$ , pak  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  spočítáme velice snadno, neboť je to vlastně přímo funkční hodnota  $f(x_0)$ .



**Příklad 6.27.** Vypočtěte následující limity.

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x,$

b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \operatorname{arctg} x,$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} e^x.$

**Řešení.** K výpočtu využijeme spojitost příslušných funkcí. Platí:

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = \sin 0 = 0,$

b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4},$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = e^0 = 1.$

▲

B)

### Limity v nevlastních bodech a v bodech, v nichž není funkce definována

Kvůli počítání složitějších limit je vhodné si zapamatovat mnohé limity základních elementárních funkcí v nevlastních bodech a v bodech, v nichž nejsou funkce definovány. Jejich odvození lze provést přímo z definice — viz následující příklad.



**Příklad 6.28.** Dokažte, že platí

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

**Řešení.** Nejprve dokážeme  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ . Podle definice limity musí ke každému okolí  $\mathcal{O}(+\infty)$  bodu  $+\infty$  existovat pravé prstencové okolí  $\mathcal{P}^+(0)$  bodu nula tak, že pro každé  $x \in \mathcal{P}^+(0)$  platí  $\frac{1}{x} \in \mathcal{O}(+\infty)$ . Neboli

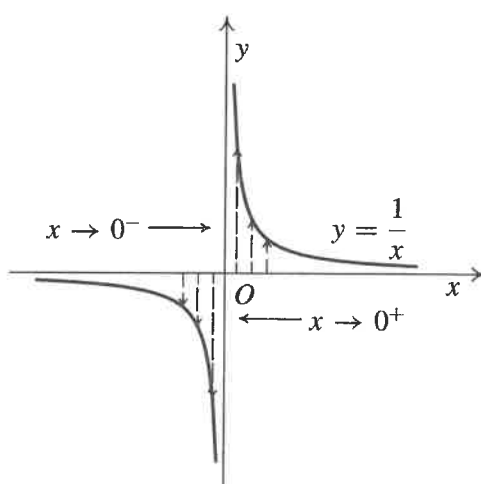
$$\forall k \in \mathbb{R} \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x \in (0, \delta) : \frac{1}{x} > k.$$

To znamená, že ke každému  $k$  hledáme  $\delta$  takové, že pro každé  $x$  z pravého  $\delta$ -okolí bodu nula bude  $\frac{1}{x}$  větší než  $k$ .

Přitom, je-li  $k \leq 0$ , pak můžeme vzít  $\delta \in \mathbb{R}^+$  libovolně, neboť pro  $\forall x \in (0, \delta)$  platí  $\frac{1}{x} > k$  (kladné číslo je vždy větší než záporné, příp. nula). V případě, že je  $k > 0$ , pak můžeme zvolit  $\delta = \frac{1}{k}$ . Pak pro  $\forall x \in (0, \delta)$  platí  $\frac{1}{x} > k$  (zdůvodnění:  $x \in (0, \delta) = (0, \frac{1}{k})$ , tedy  $x < \frac{1}{k}$ , a proto  $\frac{1}{x} > k$ ). Dokázali jsme tedy, že ke každému  $k$  existuje  $\delta$  takové, že pro každé  $x$  z pravého  $\delta$ -okolí bodu nula bude  $\frac{1}{x}$  větší než  $k$ .

Analogicky dokážeme druhou limitu. Poznamenejme, že z předchozích výsledků plyne, že  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$  neexistuje (jednostranné limity se nerovnají).

Grafem funkce  $f: y = \frac{1}{x}$  je rovnoosá hyperbola — viz obr. 6.12. Pomocí grafu funkce si lze příslušné limity jednoduše zapamatovat. ▲



Obr. 6.12

Obdobně jako v předchozím příkladě lze dokázat následující limity základních elementárních funkcí. Lehce si je zapamatujete, znáte-li grafy příslušných funkcí.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty, \quad a > 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0, \quad 0 < a < 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arccotg} x = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^s = +\infty \text{ pro } s > 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^s = 0 \text{ pro } s < 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0, \quad a > 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty, \quad 0 < a < 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arccotg} x = \pi,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^s = 0 \text{ pro } s > 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^s = +\infty \text{ pro } s < 0.$$

## 6.5 Limity elementárních funkcí

V této kapitole si ukážeme, jak počítat limity elementárních funkcí v bodě  $x_0$ . Připomeňme, že elementárními funkcemi rozumíme funkce, které lze vytvořit ze základních elementárních funkcí pomocí konečného počtu operací sčítání, odčítání, násobení, dělení a skládání funkcí.

### Limity funkcí spojitých v bodě

Víme, že elementární funkce jsou spojité ve všech vnitřních bodech svých definičních oborů. Jejich limity v těchto bodech tedy vypočteme prostým dosazením.



**Příklad 6.29.** Vypočtěte následující limity.

- a)  $\lim_{x \rightarrow 1} (\ln x + x^2 + 3)$ ,      b)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^3 + x^2 - 2x + 11}{x^2 + x + 1}$ ,      c)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos x}{x}$ ,  
 d)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sqrt{x \cos x + \operatorname{tg} \frac{x}{2}}$ ,      e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + 2^x \sin x}{\ln(1+x) + (x+1) \cos x}$ ,      f)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} x \operatorname{tg} x$ .

**Řešení.** K výpočtu využijeme spojitost příslušných funkcí. Platí:

- a)  $\lim_{x \rightarrow 1} (\ln x + x^2 + 3) = \ln 1 + 1 + 3 = 4$ ,  
 b)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^3 + x^2 - 2x + 11}{x^2 + x + 1} = \frac{-3 + 1 + 2 + 11}{1 - 1 + 1} = 11$ ,  
 c)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos x}{x} = \frac{\cos \pi}{\pi} = -\frac{1}{\pi}$ ,  
 d)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sqrt{x \cos x + \operatorname{tg} \frac{x}{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}} = \sqrt{\frac{\pi}{2} \cdot 0 + 1} = 1$ ,  
 e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + 2^x \sin x}{\ln(1+x) + (x+1) \cos x} = \frac{e^0 + 2^0 \sin 0}{\ln 1 + 1 \cdot \cos 0} = \frac{1 + 1 \cdot 0}{0 + 1 \cdot 1} = 1$ ,  
 f)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} x \operatorname{tg} x = \frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \cdot 1 = \frac{\pi}{4}$ . ▲

Právě jsme si ukázali, jak lze využít spojitosti elementárních funkcí k výpočtu limit v bodech  $x_0 \in D(f)$ .

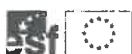
Při výpočtu limit postupujeme vždy tak, že nejprve zkusíme „dosadit“. Pokud nám vyjde smysluplný výsledek, pak jsme hotovi. V případě, že počítáme limitu v nevlastním bodě nebo v bodě, kde není funkce definována, pak můžeme využít dále uvedených vět.

### §5. Věty o limitech funkcí

#### 6.5.1. A) Věta 6.17 o limitě součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí

Věta 6.17, která byla již uvedena, říká, že limita součtu (rozdílu, součinu, podílu) je rovna součtu (rozdílu, součinu, podílu) jednotlivých limit, má-li příslušná pravá strana rovnosti smysl.

*ruš. str. 160*



**Poznámka 6.30.**

1. V této chvíli je třeba si zopakovat počítání s  $+\infty$  a  $-\infty$  (viz str. 21). Z hlediska konkrétního výpočtu limit je pro nás především důležitá operace

$$\frac{x}{+\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0 \quad \text{pro } x \in \mathbb{R}.$$

2. Dále je nutné znát výrazy, které nejsou definovány. Vzhledem k důležitosti si je znovu připomeneme (použijeme již stručnějšího zápisu než na str. 21).

$$\infty - \infty, \quad 0 \cdot (\pm\infty), \quad \frac{A}{0} \quad (A \in \mathbb{R}^*), \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}.$$

Přitom je třeba si uvědomit, že do případu  $\frac{A}{0}$  ( $A \in \mathbb{R}^*$ ) spadají tyto možnosti:  $\frac{0}{0}$ ,  $\frac{+\infty}{0}$ ,  $\frac{-\infty}{0}$  a  $\frac{A}{0}$ , kde  $A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

3. V případě, že  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  a  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ , budeme říkat, že  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$  je **limita typu  $\frac{0}{0}$** . V případě, že  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$  a  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty$ , budeme říkat, že  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$  je **limita typu  $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$** . Obdobně pro ostatní případy.

K výpočtu limit typu  $\frac{0}{0}$  a  $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$  využíváme nejčastěji tzv. l'Hospitalovo pravidlo, se kterým se seznámíme později (viz str. 233). Limity většiny dalších nedefinovaných výrazů lze na limity typu  $\frac{0}{0}$  a  $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$  převést a opět použít l'Hospitalovo pravidlo. V některých případech však lze limity tohoto typu spočítat i bez použití l'Hospitalova pravidla (někdy je to i výhodnější). Podívejte se na příklady 6.34, 6.35, 6.36 a 6.42. Ve všech těchto příkladech jde o limity typu  $\frac{0}{0}$ . Typickým příkladem na limitu typu  $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ , který řešíme bez použití l'Hospitalova pravidla, je limita racionální lomené funkce — viz příklad 6.39 a), b).

**Příklad 6.31.** Vypočtete následující limity.

- a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + x)$ ,      b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + x)$ ,      c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \operatorname{arctg} x$ ,  
d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 + 1}$ ,      e)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$ .

**Řešení.**

- a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x + \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty + \infty = +\infty$ ,  
b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x + \lim_{x \rightarrow -\infty} x = 0 - \infty = -\infty$ ,  
c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \operatorname{arctg} x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x = +\infty \cdot \frac{\pi}{2} = +\infty$ ,  
d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 + 1} = \frac{1}{(+\infty)^2 + 1} = \frac{1}{+\infty + 1} = \frac{1}{+\infty} = 0$ ,  
e)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) = \sqrt{(-\infty)^2 + 1} - (-\infty) =$   
 $= \sqrt{+\infty + 1} + \infty = +\infty + \infty = +\infty$ .



V předchozích příkladech jsme počítali limity v nevlastních bodech. Nyní si uvedme příklad na výpočet limity ve vlastním bodě, v němž není funkce definována.



**Příklad 6.32.** Vypočtete  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$ .

**Řešení.** Využijeme již známých limit z příkladu 6.28. Dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty.$$

Obě jednostranné limity se rovnají, původní limita tedy existuje a je rovna  $+\infty$ . Tedy

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

### V.5.2. B) Věta o limitě funkcí shodujících se v prstencovém okolí bodu

**Věta 6.33.** Necht'  $f$  a  $g$  jsou funkce a necht' existuje prstencové okolí  $\mathcal{P}(x_0)$  bodu  $x_0 \in \mathbb{R}^*$  takové, že pro každé  $x \in \mathcal{P}(x_0)$  platí  $f(x) = g(x)$ . Necht'  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A$ ,  $A \in \mathbb{R}^*$ . Pak existuje  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  a platí  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ .

Stačí tedy najít jinou funkci  $g$ , jejíž funkční hodnoty se ve všech bodech prstencového okolí bodu  $x_0$  shodují s funkčními hodnotami funkce  $f$  a jejíž limitu umíme vypočítat. Pak se limity obou funkcí rovnají. K nalezení funkce  $g$  využijeme známých úprav výrazů. Například u racionální lomené funkce využijeme rozkladu čitatele i jmenovatele na součin a následného krácení, u zlomků s odmocninami obvykle využíváme rozšiřování čitatele i jmenovatele vhodným výrazem, u výrazů s goniometrickými funkcemi využíváme k úpravě známých vztahů pro goniometrické funkce atd. Ukažme si postup na následujících příkladech.



**Příklad 6.34.** Vypočtete  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$ .

**Řešení.** Označme  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$ . Chceme určit limitu v bodě  $x_0 = -1$ , v němž není funkce  $f$  definována. Avšak pro  $x \neq -1$  je

$$\frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{(x + 1)(x - 1)}{x + 1} = x - 1.$$

Položme nyní  $g(x) = x - 1$ . Pro  $x \neq -1$  platí  $f(x) = g(x)$ . Funkce  $g$  je ale navíc definovaná i pro  $x = -1$  a je v tomto bodě spojitá. Dle věty 6.33 tedy dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x - 1) = -1 - 1 = -2.$$



**Příklad 6.37.** Vypočtěte jednostranné limity  $\lim_{x \rightarrow 1^\pm} \frac{|x^2 - 1|}{x - 1}$ .

*Řešení.* Nejprve vypočteme limitu zprava. Přitom musíme odstranit absolutní hodnotu (v pravém okolí bodu 1 je výraz v absolutní hodnotě kladný):

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x^2 - 1|}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 1) = 2.$$

Analogicky pro limitu zleva:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x^2 - 1|}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-x^2 + 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(1+x)(1-x)}{-(1-x)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-1-x) = -2. \quad \blacktriangle$$

Nakonec si uveďme využití věty při výpočtu limit v nevlastních bodech. Jedná se o případy, kdy nelze ihned využít větu 6.17, tj. přímo dosadit, neboť bychom dostali nedefinované výrazy. Cílem je tedy „upravit“ danou funkci tak, aby se při výpočtu limity z upravené funkce již věta 6.17 použít dala. Přitom nejčastější úpravou je vytýkání (u polynomů většinou vytýkáme nejvyšší mocninu, u lomené funkce nejvyšší mocninu ze jmenovatele) nebo rozšiřování vhodným výrazem.



**Příklad 6.38.** Vypočtěte  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0)$ , kde  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$ ,  $a_n \neq 0$ .

*Řešení.* Pokud by byly všechny koeficienty  $a_n$  kladné, pak bychom s využitím věty 6.17 dostali součet konečného počtu  $+\infty$  a výsledek by byl  $+\infty$ . Obdobně pro všechna  $a_n$  záporná. V obecném případě, kdy jsou některé koeficienty kladné a jiné záporné, nestačí využít větu 6.17.

V  $\mathcal{P}(\infty)$  platí

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n \left( a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right).$$

S využitím věty 6.33 a faktu, že  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$  a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_i}{x^{n-i}} = 0$ ,  $i = 0, \dots, n-1$ , vyjde

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) = +\infty (a_n + 0 + \dots + 0) = +\infty \operatorname{sgn} a_n.$$

Podobně pro  $x \rightarrow -\infty$  je výsledek limity  $+\infty(-1)^n \operatorname{sgn} a_n$ .  $\blacktriangle$



**Příklad 6.39.** Vypočtěte limity

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x + 1}{2x^2 + x - 3},$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 3}{\sqrt{3x^4 - 1}},$

c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x(\sqrt{x^2 + 9} - \sqrt{x^2 - 9}).$

**Řešení.**

- a) Z příkladu 6.38 víme, že o výsledku limity polynomu rozhoduje nejvyšší mocnina. V našem případě  $x^2$  (v čitateli i ve jmenovateli). Jde tedy o limitu typu  $\frac{+\infty}{+\infty}$ . Vytkneme nejvyšší mocninu jmenovatele. Vyjde

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x + 1}{2x^2 + x - 3} & \stackrel{\frac{1}{x^2}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2 \left(2 + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2}\right)} = \\ & = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{2 + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2}} = \frac{1 - 0 + 0}{2 + 0 - 3 \cdot 0} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Využili jsme toho, že  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0$  a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{(+\infty)^2} = \frac{1}{+\infty} = 0$ .

- b) Nyní již budeme postupovat rychleji:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 3}{\sqrt{3x^4 - 1}} \stackrel{\frac{1}{x^2}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 3}{\sqrt{x^4 \left(3 - \frac{1}{x^4}\right)}} =$   
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(2 + \frac{3}{x^2}\right)}{x^2 \sqrt{3 - \frac{1}{x^4}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{3}{x^2}}{\sqrt{3 - \frac{1}{x^4}}} = \frac{2 + 0}{\sqrt{3 - 0}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$

- c) U tohoto příkladu nevyužijeme vytýkání (to by vedlo k nedefinovanému výrazu  $\infty \cdot 0$ ), ale rozšiřování.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} x(\sqrt{x^2 + 9} - \sqrt{x^2 - 9}) & = \\ & = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \frac{\sqrt{x^2 + 9} - \sqrt{x^2 - 9}}{1} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 9} + \sqrt{x^2 - 9}}{\sqrt{x^2 + 9} + \sqrt{x^2 - 9}} = \\ & = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \frac{x^2 + 9 - (x^2 - 9)}{\sqrt{x^2 + 9} + \sqrt{x^2 - 9}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{18x}{\sqrt{x^2 + 9} + \sqrt{x^2 - 9}} \stackrel{\frac{1}{x}}{=} \\ & = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{18x}{|x| \left( \sqrt{1 + \frac{9}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{9}{x^2}} \right)} = \frac{-18}{2} = -9. \end{aligned}$$

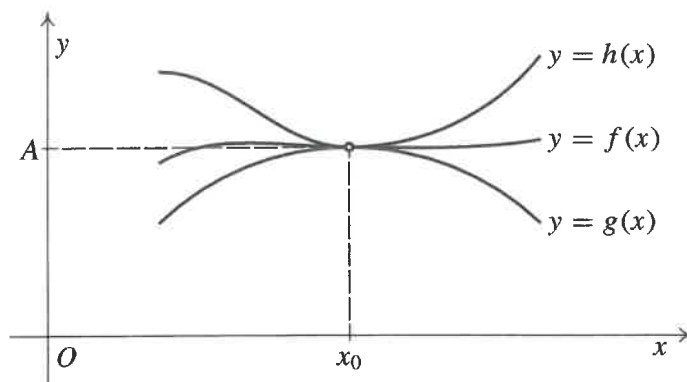
$\sqrt{x^2} = |x|$

Využili jsme faktu, že  $\sqrt{x^2} = |x|$  a pro záporná čísla ( $x \rightarrow -\infty$ ) je  $|x| = -x$ . Proto je u výsledku znaménko mínus. ▲

### V.5.3.C) **Věta o sevření** = *řeka o dvou limitách* (analogie V.5.1. a V.5.2.)

**Věta 6.40.** Necht'  $f$ ,  $g$ ,  $h$  jsou funkce a necht' existuje prstencové okolí  $\mathcal{P}(x_0)$  bodu  $x_0 \in \mathbb{R}^*$  takové, že pro každé  $x \in \mathcal{P}(x_0)$  platí  $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ . Necht'  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A$ ,  $A \in \mathbb{R}^*$ . Pak existuje  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  a platí  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ .

Obsah věty je zřejmý z **obrázku 6.13**. Jestliže grafy funkcí  $g$ ,  $f$  a  $h$  leží v okolí  $x_0$  „nad sebou“ a hodnoty „horní“ a „dolní“ funkce se blíží ke stejnému číslu, musí to platit i pro „prostřední“ funkci. Věta platí i pro jednostranné limity.



Obr. 6.13

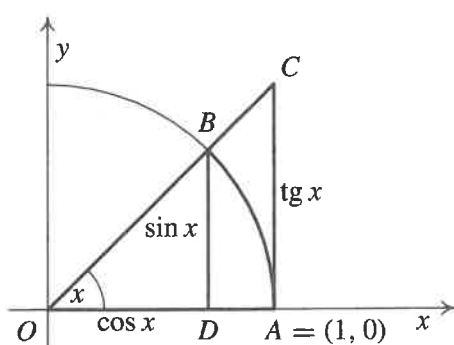
**Poznámka 6.41.**

1. V případě, že  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ , pak také limita  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  a funkci  $h$  vůbec nepotřebujeme.
2. V případě, že  $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = -\infty$ , pak také limita  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$  a funkci  $g$  nepotřebujeme.

Pomocí předchozí věty si nyní dokážeme platnost následující důležité limity

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad \text{viz příloha}$$

Tuto limitu budeme často využívat při výpočtech dalších limit, je proto dobré si ji zapamatovat.



Obr. 6.14

Označme

- $P_1$  ..... obsah  $\triangle ODB$ ,  
 $P_2$  ..... obsah kruhové výseče  $OAB$ ,  
 $P_3$  ..... obsah  $\triangle OAC$ .

**Důkaz.** Uvažujme zatím jen  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ . Použijeme větu 6.40, v níž zvolíme  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ . Musíme nyní najít vhodnou funkci  $g$ , která leží „pod funkcí  $f$ “, a vhodnou funkci  $h$ , která leží „nad funkcí  $f$ “ na intervalu  $(0, \frac{\pi}{2})$ . Vyjdeme z obrázku 6.14.

Připomeňme, že velikost úhlu je délka oblouku jednotkové kružnice. Tedy oblouk  $\widehat{AB}$  má délku  $x$ . Dále z definice goniometrických funkcí máme:

$$\overline{BD} = \sin x, \quad \overline{OD} = \cos x, \quad \overline{AC} = \operatorname{tg} x.$$

### V.5.4.: D) Věta o limitě součinu „nulové“ a ohraničené funkce (analogie V.5.7. v prstencové)

**Věta 6.43.** Necht'  $f, g$  jsou funkce a  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ . Necht' existuje prstencové okolí  $\mathcal{P}(x_0)$  bodu  $x_0 \in \mathbb{R}^*$  takové, že funkce  $g$  je na tomto okolí ohraničená. Pak  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = 0$ .

Pro jednoduchost budeme užívat názvu věta o limitě součinu „nulové“ a ohraničené funkce, i když přesnější by bylo říkat věta o součinu ohraničené funkce a funkce, jejíž limita je nula.



**Příklad 6.44.** Vypočtete  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$ .

**Řešení.** I když limita  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$  neexistuje, zadaná limita existuje, neboť  $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$  a funkce  $g: y = \sin \frac{1}{x}$  je ohraničená ( $|\sin \frac{1}{x}| \leq 1$ ). Tudíž podle věty 6.43 je

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$



**Příklad 6.45.** Vypočtete  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos e^{x^2+x+1}}{x}$ .

**Řešení.** Platí

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos e^{x^2+x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \cos e^{x^2+x+1} = 0,$$

neboť  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$  a funkce  $g(x) = \cos e^{x^2+x+1}$  je ohraničená.

### V.5.5., V.5.6.: E) Věty o limitě složené funkce

Z hlediska praktických výpočtů mají velký význam následující věty o limitě složené funkce.

**Věta 6.46.** Necht'  $x_0 \in \mathbb{R}^*$ ,  $A \in \mathbb{R}$  a necht' platí

i)  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A,$

ii) funkce  $f$  je spojitá v bodě  $A$ .

Pak složená funkce  $f \circ g$  má v bodě  $x_0$  limitu a platí

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)\right) = f(A).$$

Všimněte si, že k platnosti věty o limitě složené funkce nestačí existence limit vnitřní a vnější složky. Je ještě třeba, aby vnější složka byla spojitá. Stručně řečeno, předchozí věta říká, že s limitou je možné „vejít“ dovnitř složené funkce, je-li vnější složka spojitá.

**Příklad 6.47.** Vypočtěte  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \left( x^2 \sin \frac{1}{x} \right)$ .



**Řešení.** Jedná se o složenou funkci. Vnější složka (funkce kosinus) je spojitá všude a limita vnitřní složky existuje a je vlastní. Platí, že

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0,$$

neboť se jedná o limitu součinu „nulové“ a ohraničené funkce. Tedy zadaná limita

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos \left( x^2 \sin \frac{1}{x} \right) = \cos \left( \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} \right) = \cos 0 = 1. \quad \blacktriangle$$

Nyní si uvedeme jinou variantu věty o složené funkci, která nevyžaduje spojitost vnější funkce, ale zato klade doplňující podmínku na vnitřní funkci.

**Věta 6.48.** Nechť  $x_0 \in \mathbb{R}^*$ ,  $A, B \in \mathbb{R}^*$  a nechť platí

i)  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A,$

ii)  $\lim_{y \rightarrow A} f(y) = B,$

iii) existuje prstencové okolí  $\mathcal{P}(x_0)$  bodu  $x_0$  takové, že pro každé  $x \in \mathcal{P}(x_0)$  je  $g(x) \neq A$ .

Pak  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = B.$

**Poznámka 6.49.** Uvědomte si, že v předchozí větě je předpoklad  $g(x) \neq A$  na nějakém  $\mathcal{P}(x_0)$  velmi důležitý. Uvažujme například funkce  $g$  a  $f$  dané předpisy

$$g(x) = 0, \quad f(y) = \begin{cases} 1, & y \neq 0, \\ 2006, & y = 0. \end{cases}$$

Platí  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ ,  $\lim_{y \rightarrow 0} f(y) = 1$ . Přitom ale  $\lim_{x \rightarrow 0} f(g(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} 2006 = 2006 \neq 1$ .

**Příklad 6.50.** Vypočtěte limity

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x},$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x}.$



*Řešení.*

a) Limitu nejprve upravíme a pak použijeme větu o složené funkci. Budeme chtít využít známé limity  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} \cdot \frac{5}{5} = 5 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} \stackrel{(*)}{=} 5 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 5 \cdot 1 = 5.$$

Zdůvodňeme rovnost (\*): Označme  $x_0 = 0$ ,  $f(y) = \frac{\sin y}{y}$ , kde  $y = g(x) = 5x$ . Dále postupujeme podle věty 6.48.

- i)  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 5x = 0 = A$ ,
- ii)  $\lim_{y \rightarrow A} f(y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1 = B$ ,
- iii) existuje  $\mathcal{P}(0)$  takové, že pro každé  $x \in \mathcal{P}(0)$  platí  $g(x) = 5x \neq 0$ . (Je splněno pro každé prstencové okolí bodu nula.)

Tedy podle věty 6.48 platí rovnost (\*).

b) Obdobně jako v předchozím příkladě dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x} \stackrel{(*)}{=} \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y - 1}{y^3 - 1} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y - 1}{(y - 1)(y^2 + y + 1)} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{1}{y^2 + y + 1} = \frac{1}{3}.$$

Zdůvodňeme rovnost (\*): Označme  $x_0 = 0$ ,  $f(y) = \frac{y-1}{y^3-1}$ , kde  $y = g(x) = \sqrt[3]{1+x}$  (z toho  $x = y^3 - 1$ ) a postupujeme podle věty 6.48.

- i)  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{1+x} = 1$ ,
- ii)  $\lim_{y \rightarrow 1} \frac{y-1}{y^3-1} = \frac{1}{3}$ ,
- iii) zřejmě pro každé  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  platí  $\sqrt[3]{1+x} \neq 1$ . Tedy existuje  $\mathcal{P}(0)$  takové, že pro každé  $x \in \mathcal{P}(0)$  platí  $g(x) = \sqrt[3]{1+x} \neq 1$ . (Je opět splněno pro každé prstencové okolí bodu nula.) ▲

Dále si uvedeme tvrzení, jež plyne ihned z vět 6.46 a 6.48 o složených funkcích. Pokuste se tento důsledek sami dokázat.

**Důsledek 6.51.** *Nechť  $g$  je funkce a  $x_0 \in \mathbb{R}^*$ . Pak*

- i) *jestliže  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A$ ,  $A \in \mathbb{R}$ , pak  $\lim_{x \rightarrow x_0} e^{g(x)} = e^A$ ,*
- ii) *jestliže  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ , pak  $\lim_{x \rightarrow x_0} e^{g(x)} = +\infty$ ,*
- iii) *jestliže  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$ , pak  $\lim_{x \rightarrow x_0} e^{g(x)} = 0$ .*

Předchozí důsledek budeme často potřebovat při výpočtu limit tzv. *exponenciálních výrazů*  $f(x)^{g(x)}$  (volně řečeno, jde o výrazy typu „funkce na funkci“).

Přitom, jsou-li  $f$  a  $g$  dvě funkce, pak

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}, \quad \text{je-li } f(x) > 0. \quad (6.2)$$

*Nečt*



Pro limitu pak platí

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{g(x) \ln f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \cdot \ln f(x)}$$

Dále stačí určit limitu výrazu v exponentu, tj.  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \ln f(x)$ , a využít důsledek 6.51.

**Příklad 6.52.** Vypočtěte limitu  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\ln x}$ .  $0^\infty$  — není neurčitý výraz ( $\rightarrow \infty$ )



**Řešení.** Výraz v limitě nejprve musíme upravit.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln x \cdot \ln x}.$$

Nyní určíme limitu výrazu v exponentu, tj.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \cdot \ln x = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty.$$

Pomocí důsledku 6.51 dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln x \cdot \ln x} = +\infty.$$

*Př. DÚ:*  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^{\ln x})^{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\ln x \cdot \ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\ln x \cdot \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \cdot \ln x \cdot \ln x} = e^{(-\infty) \cdot (-\infty) \cdot (-\infty)} = e^{-\infty} = 0$  ▲

Limity, které jsme doposud počítali, byly většinou typu  $\frac{0}{0}$ ,  $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ ,  $0 \cdot \infty$  nebo  $\infty - \infty$ . Všechny tyto typy se dále naučíme řešit i jinak — pomocí l'Hospitalova pravidla.

Zbývá nám seznámit se s posledním typem limity „ $\frac{1}{0}$ “. S tímto typem limity se budeme dále setkávat poměrně často, věnujme mu tedy dostatečnou pozornost. Navíc — tento typ limity nelze řešit l'Hospitalovým pravidlem.

### V.5.7.1 F) Věta o limitě typu „ $\frac{1}{0}$ “

**Věta 6.53.** Nechť  $f$  je funkce a nechť existuje pravé prstencové okolí  $\mathcal{P}^+(x_0)$  bodu  $x_0 \in \mathbb{R}^*$  takové, že pro každé  $x \in \mathcal{P}^+(x_0)$  platí  $f(x) > 0$  (resp.  $f(x) < 0$ ). Nechť  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = 0$ . Pak platí  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{1}{f(x)} = +\infty$  (resp.  $-\infty$ ).

Analogicky pro levé prstencové okolí.

**Poznámka 6.54.** Skutečnost obsažená v předchozí větě se někdy symbolicky zapisuje takto:

$$\frac{1}{0^+} = +\infty, \quad \frac{1}{0^-} = -\infty.$$

Tuto větu využíváme především k výpočtu limit  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)}$ , kde platí  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = k$ ,  $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , a  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ . Výpočet zadané limity pak převedeme na výpočet jednostranných limit a využijeme větu 6.53



**Příklad 6.55.** Vypočtěte limity

a)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{x-2},$

b)  $\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{1}{\sin x},$

c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{\operatorname{arccotg} x}.$

*Řešení.* a) Limitu nejprve upravíme a pak použijeme větu 6.53.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} x \cdot \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2}.$$

Označme  $f(x) = x - 2$ . Pak  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 2) = 0$ . Dále víme, že funkce  $f$  je v pravém prstencovém okolí bodu 2 kladná. Tedy podle věty 6.53 platí  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$ . Celkem tedy

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} x \cdot \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = 2 \cdot (+\infty) = +\infty.$$

b) Budeme postupovat stejně jako v předchozím příkladě. Označme  $f(x) = \sin x$ . Pak  $\lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \sin x = 0$ . Dále víme, že funkce  $f$  je v dostatečně malém pravém prstencovém okolí bodu  $\pi$  záporná. Tedy podle věty 6.53 platí

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{1}{\sin x} = -\infty.$$

c) Limitu nejprve upravíme

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{\operatorname{arccotg} x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} x \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\operatorname{arccotg} x}.$$

Označme  $f(x) = \operatorname{arccotg} x$ . Pak  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arccotg} x = 0$ . Dále víme, že funkce  $f$  je v levém prstencovém okolí (jiné ani nelze uvažovat) bodu  $\infty$  kladná. Tedy podle věty 6.53 platí

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{\operatorname{arccotg} x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} x \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\operatorname{arccotg} x} = \frac{\pi}{2} (+\infty) = +\infty. \quad \blacktriangle$$



**Příklad 6.56.** Existují-li následující limity, určete jejich hodnotu.

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + 1}{\sin x},$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + 1}{\cos x - 1},$

c)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3}{(x+2)^2}.$

*Řešení.* a) Jedná se o limitu  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{f(x)}$ , kde  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x + 1) = 1$  a  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$ . Abychom mohli použít větu 6.53, musíme vyšetřit zvlášť obě jednostranné limity:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x + 1}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x + 1) \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sin x} = 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sin x} = +\infty,$$